UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PADOVA

DISPENSA DI

PROBABILITÀ

(Versione 30/01/2019)

Stesura a cura di:
Stefano Ivancich

INDICE

Questa dispensa è scritta da studenti senza alcuna intenzione di sostituire i materiali universitari. Essa costituisce uno strumento utile allo studio della materia ma non garantisce una preparazione altrettanto esaustiva e completa quanto il materiale consigliato dall'Università.
Lo scopo di questo documento è quello di riassumere i concetti fondamentali degli appunti presi durante la lezione, riscritti, corretti e completati facendo riferimento alle slide e al libro di testo: "*S. M. Ross, Calcolo delle Probabilità, terza edizione, Apogeo (2013), Capitoli 2-8*" per poter essere utilizzato come un manuale "pratico e veloce" da consultare. Non sono presenti esempi e spiegazioni dettagliate, per questi si rimanda al testo citato e alle slide.

Se trovi errori ti preghiamo di segnalarli qui:

www.stefanoivancich.com
ivancich.stefano.1@gmail.com

Il documento verrà aggiornato al più presto.

1.Integrali in dimensione 2

Dominio: $D = \{(x, y): x_1 \leq x \leq x_2,\ g(x) \leq y \leq h(x)\}$

$$\int_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{f(x,y)} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy \right) dx$$

Integrale esterno è quello di cui conosco gli estremi.

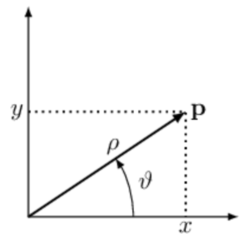
Cambio di variabile:

- $u = u(x, y) \quad v = v(x, y)$ (Pongo)
- $x = x(u, v) \quad y = y(u, v)$ (Ricalcolo x e y in funzione delle nuove variabili)
- Riscrivo dominio utilizzando le nuove coordinate. $Q = \{(u, v): \ldots\}$
- Calcolo matrice jacobiana: $\left| det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{pmatrix} \right| dudv$ (Derivate dei valori del punto 2)

  $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Coordinate polari:

- ρ, θ
- $x = \rho \cos \theta\,,\ \ y = \rho \sin \theta$ (al posto di x scriverò pcos…)
- $D = \{(\rho, \theta): \ldots \leq \rho \leq .\,.\,, \ldots \leq \theta \leq .\,.\}$ (guardo nel disegno gli estremi)
- $\left| det \begin{pmatrix} \cos\theta & -\rho \sin\theta \\ \sin\theta & \rho\cos\theta \end{pmatrix} \right| d\rho d\theta = \rho\ d\rho d\theta$



Due insiemi hanno la stessa cardinalità $|X| = |Y|\ sse\ f: X \to Y$ è biettiva

Insieme numerabile: $se\ |X| = |\mathbb{N}|$

2.Assiomi della probabilità

Ω un insieme arbitrario
Funzione di probabilità: $\boldsymbol{P}: \boldsymbol{\mathcal{P}(\Omega)} \longrightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$
Assiomi:

- $0 \leq P(A) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- Se $A_1, \dots, A_n, \dots \subseteq \Omega$ è una famiglia numerabile di sottoinsiemi a 2 a 2 disgiunti, allora
$$P(\cup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$$

Proprietà:

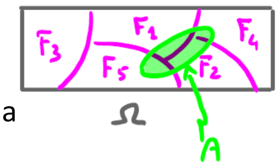
- Se $A_1, \dots, A_n, \dots \subseteq \Omega$ sono a 2 a 2 disgiunti, allora $P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = P(A_1) + \dots + P(A_n)$
- $P(\emptyset) = 0$
- Se $E \subseteq F \subseteq \Omega$, allora $P(E) \leq P(F)$

$\boldsymbol{P([a, b]) = b - a}$ (Vale per intervalli sia aperti che chiusi)

Probabilità condizionata di E ad F: $\boldsymbol{P(E|F)} = \frac{\boldsymbol{P(E \cap F)}}{\boldsymbol{P(F)}} = \frac{P(EF)}{P(F)}$ con $P(F) \neq 0$ e $E, F \subseteq \Omega$
Funzione: $\boldsymbol{P(\cdot\,|F)}: \boldsymbol{\mathcal{P}(\Omega)} \longrightarrow [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$, $\boldsymbol{E \longmapsto P(E|F)}$ (qualunque evento-->evento condizionato F)

Formula del prodotto: $\boldsymbol{P(A_1 \dots A_n)} = P(A_1|A_2 \dots A_n) * \dots * P(A_{n-1}|A_n)P(A_n)$

Formula della partizione: $\boldsymbol{P(A) = P(A|F_1)P(F_1) + \dots + P(A|F_n)P(F_n)}$
$$con\ [F_1, \dots, F_n]\ partizione\ di\ \Omega, \mathrm{A} \in \mathcal{P}(\Omega)$$
Formula di Bayes: $\boldsymbol{P(F_j|A)} = \frac{\boldsymbol{P(AF_j)}}{P(A)} = \frac{\boldsymbol{P(A|F_j)P(F_j)}}{\boldsymbol{P(A|F_1)P(F_1) + \dots + P(A|F_n)P(F_n)}}$ (Inverte la condizionata)



Eventi indipendenti se: $\boldsymbol{P(AB) = P(A)P(B)}$ (se + eventi: a 2 a 2 indipendenti, a 3 a 3…P(ABC))

Continuità delle funzioni di probabilità:

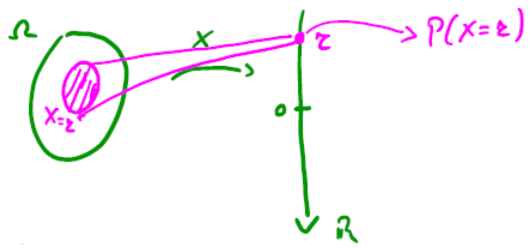
- $P(\cup_{i=1}^{+\infty} E_i) = \lim_{i \to \infty} P(E_i)$ con $E_1 \subseteq \dots \subseteq E_i$ quantità numerabile di sottoinsiemi di Ω
- $P(\cap_{i=1}^{+\infty} E_i) = \lim_{i \to \infty} P(E_i)$ con $E_1 \supseteq \dots \supseteq E_i$ quantità numerabile di sottoinsiemi di Ω

3. Variabili aleatorie

3.1. Definizioni

Variabile aleatoria X: è una funzione $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

Variabile aleatoria discreta X: se Im(X) ha cardinalità al più numerabile.
Funzione Densità discreta: è una funzione $p_X: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \qquad r \longmapsto \boldsymbol{p_X(r) = P(X = r)}$
Sotto insieme di Ω che fa assumere a X il valore r



Funzione di distribuzione: $F_X: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1] \qquad r \longmapsto \boldsymbol{F_X(r) = P(X \leq r)}$
Sotto insieme di Ω che fanno assumere a X valori $\leq r$

- F_X è crescente
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0, \quad \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$
- $F_X \text{ è } continua\ a\ destra: \forall b \in \mathbb{R}\ F_X(b) = \lim_{x \to b^+} F_X(x)$

Variabili aleatorie **indipendenti** se: $\forall A, B \subseteq \mathbb{R}\ tutti\ gli\ \boldsymbol{eventi}\ X \in A\ e\ Y \in B\ sono$ **indipendenti**
Ovvero se $P(X \in A, Y \in B) = P(X \in A)P(Y \in B)$
Una variabile aleatoria individua solo alcuni eventi dello spazio campionario, quindi due variabili sono indipendenti quando tutti i loro eventi sono indipendenti.

Valore atteso di una v.a: $\boldsymbol{E[X] = \sum_{x \in Im(X)} x p_X(x) = \sum_{x \in Im(X)} x P(X = x)}$ (è una somma pesata)

- $E[X_1 + \cdots + X_n] = E[X_1] + \cdots + E[X_n]$
- $E[g \circ X] = E[g(X)] = \sum_{\boldsymbol{x \in Im(X)}} \boldsymbol{g(x) p_X(x)}\ \ con\ g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
- $E[aX + b] = aE[X] + b \quad con\ a, b \in \mathbb{R}$

Varianza: $\boldsymbol{Var(X) = E[(X - E[X])^2]} = E[X^2] - E[X]^2$

- $Var(X_1 + \cdots + X_m) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_m)$ (Solo se indipendenti)
- $Var(aX + b) = a^2 Var(X)$

Deviazione standard: $\boldsymbol{\partial(X) = \sqrt{Var(X)}}$

Covarianza: $\boldsymbol{Cov(X, Y) = E[X * Y] - E[X] * E[Y]}$ (Più grande è, più le variabili sono Dipendenti)

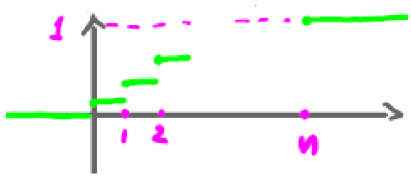
- $Cov(X, X) = Var(X)$
- $Var(X + Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X, Y)$
- $Var(X_1 + \cdots + X_m) = \sum_{i,j} Cov(X_i, X_j)$

3.2. Variabili aleatorie Discrete

V.a. di **Bernoulli di parametro** $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$
X=1 successo, X=0 insuccesso, p= probabilità di successo

- $Im(X) = \{0,1\}$ (Successo, insuccesso)
- $\boldsymbol{p_X(1) = p} \quad e \quad \boldsymbol{p_X(0) = 1 - p}$
- $E[Be(p)] = p$
- $Var(X) = p(1-p)$

V.a. **Binomiale di parametri** $(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{p})$ con $\boldsymbol{p} \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{n} \in \mathbb{N}_{\geq 1}$
X conta il numero di successi ottenuti in n prove



- $Im(X) = \{0, \dots, n\}$
- $\boldsymbol{p_X(i) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i}}$
- $E[Bin(n,p)] = np$
- $Var(X) = np(1-p)$

Somme di Bernoulli: $X_1 + \cdots + X_n$ è $una\ v.a. Binomiale\ (n,p)\ sse\ sono\ indipendenti.$

V.a. di **Poisson di parametro λ:** $Po(\lambda)$

- $Im(X) = \mathbb{N}$
- $\boldsymbol{p_X(i) = \frac{\lambda^i}{i!} e^{-\lambda}}$ $\forall i \in \mathbb{N}$
- $E[Po(\lambda)] = \lambda$
- $Var(X) = \lambda$

Usata come approssimazione della Binomiale quando: n molto grande, p molto piccolo, i piccolo rispetto n. con $\boldsymbol{\lambda = n * p}$. Perché usare la binomiale ha costo computazionale alto.

- $Po(\lambda) + Po(\mu) = Po(\lambda + \mu)$ con $Po(\lambda)$ e $Po(\mu)$ indipendenti

Processo di Poisson di intensità λ: è una famiglia di v.a. di Poisson $\{\boldsymbol{X_t = Po(\lambda t)}: t > 0\}$

V.a. **Geometrica di parametro** $\boldsymbol{p}$: $Ge(p)$

- $Im(X) = \mathbb{N}_{\geq 1}$
- $\boldsymbol{p_X(i) = (1-p)^{i-1} p}$
- $E[Ge(\lambda)] = \frac{1}{p}$
- $Var(X) = \frac{1-p}{p^2}$

X= n° di prove necessarie per ottenere il primo successo. Si ha un successo all'$i-esimo$ tentativo

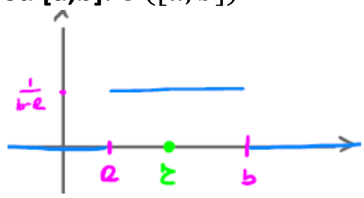
3.3. Variabili aleatorie Continue

Variabile aleatoria Continua: se $\exists \boldsymbol{f_X}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *tale che* $\forall B \subseteq \mathbb{R}$ *si ha*: $\boldsymbol{P(X \in B) = \int_B f_X(x)dx}$ con f_X *densità continua di* X

- **Distribuzione di X:** $\boldsymbol{F_X}: \mathbb{R} \to [\boldsymbol{0}, \boldsymbol{1}]$, $\quad \boldsymbol{F_X(r) = P(X \leq r) = \int_{-\infty}^{r} f_X(t)dt}$
- Se $\boldsymbol{F_X}$ **è continua** e $\boldsymbol{C^1}$ **a tratti**, allora **X è continua** e $\boldsymbol{F'_X}$ **è una funzione di densità** di X.
- Valore atteso $E[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_X(x)dx$
- $E[g(X)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)dx \qquad$ con $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *continua*
- $Var(X) = E[X^2] - E[X]^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x)dx - E[X]^2$

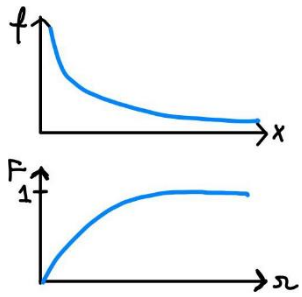
Variabile aleatoria uniformemente distribuita su [a,b]: $U([a,b])$

- $\boldsymbol{f_{U([a,b])}(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}}$
- $\boldsymbol{F_X(r) = \frac{r-a}{b-a}}$
- $E[U([a,b])] = \frac{1}{2}(a+b)$
- $Var(U([a,b])) = \frac{(a-b)^2}{12}$



Variabile aleatoria esponenziale: $Exp(\lambda)$

- $f_{Exp(\lambda)}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
- $F_{Exp(\lambda)}(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$
- $P(X > t + s | X > s) = P(X > t), \quad con\ t, s > 0$ Non ha memoria
- $E[Exp(\lambda)] = \frac{1}{\lambda}$
- $Var(Exp(\lambda)) = \frac{1}{\lambda^2}$



Variabile aleatoria Normale Standard: Z

- $f_Z(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$
- $\mathrm{F}_Z(\mathrm{a}) =$ area di f $= \Phi(a) = 1 - \Phi(-a)$ Guardare tavola di sheppard
- $P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - \Phi(a)$
- $P(a \leq X \leq b) = \Phi(b) - \Phi(a)$
- $E[Z] = 0$
- $Var(Z) = 1$
- è una normale di parametri $\mu = 0\ e\ \sigma = 1$

Variabile aleatoria Normale N di parametri $(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma^2})$:

- $f_{N(\mu,\sigma^2)}(x) = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma}$
- $\mathrm{F}_{N(\mu,\sigma^2)}(\mathrm{a}) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)$
- $E[N] = \mu$
- $Var(N) = \sigma^2$

Con varianza piccola i valori si addensano sul valor medio.

Esercizi esame:

Se discreta: $P(Bin(n,p) \geq k) = \sum_{i=k}^{n} p_X(i) = 1 - P(Bin(n,p) \leq k-1)$

Approssimo Binomiale con

- Poisson $\lambda = n * p$: quando n molto grande, p molto piccolo, i piccolo
- Normale $N\big(np, np(1-p)\big)$. $\quad P(N(\dots) \geq k - 0.5)\ \ e\ \ P(N(\dots) \leq k + 0.5)$

Integrale di $e^{-\frac{1}{\lambda}x} = -\lambda e^{-\frac{1}{\lambda}x}$

4.Teoremi Limite

4.1. Legge debole dei grandi numeri

Siano $X_1, X_2, \ldots$ una famiglia numerabile di v.a. indipendenti ed identicamente distribuite (i.i.d.)
X_i dà l'esito della prova i, sono la stessa variabile aleatoria ma che fanno riferimento a momenti diversi.
$E[X_i] = \mu$

Legge debole dei grandi numeri: $\lim\limits_{n \to +\infty} P\left(\left|\frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} - \mu\right| < \varepsilon\right) = 1, con\ \varepsilon > 0$
è certo che la media aritmetica delle v.a. differisce di μ di una quantità ε piccola a piacere.

4.2. Teorema del limite centrale

Siano $X_1, X_2, \ldots$ una famiglia numerabile di v.a. indipendenti ed identicamente distribuite (i.i.d.)
$E[X_i] = \mu, Var(X) = \sigma^2$
Teorema del limite centrale: $P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq a\right) \to \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right),\ \forall a \in \mathbb{R},\ n \to +\infty$
Quindi: $P(X_1 + \cdots + X_n \leq b) \approx P(N(n\mu, n\sigma^2) \leq b),\ con\, n \gg 0$

Correzione di continuità
Se X è una v.a. discreta che assume i valori $x_0 < x_1 < \cdots$:
- $(X \leq x_2) = (X < x_3) = \left(X < \frac{x_2 + x_3}{2}\right) = \left(X \leq \frac{x_2 + x_3}{2}\right)$
- $(X \geq x_2) = (X > x_1) = \left(X > \frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(X \geq \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

Approssimando X ad una v.a. continua Y:
- $(X \leq x_2) \approx \left(Y \leq \frac{x_2 + x_3}{2}\right) = \left(Y < \frac{x_2 + x_3}{2}\right)$
- $(X \geq x_2) \approx \left(Y > \frac{x_1 + x_2}{2}\right) = \left(Y \geq \frac{x_1 + x_2}{2}\right)$

$Per\ n \gg 0$ la variabile Binomiale e di Poisson possono essere approssimate da una normale.
- $Bin(n,p) = Be_1(p) + \cdots + Be_n(p) \approx N(np, np(1-p))$
  $P(Bin(n,p) \leq a) \approx \Phi\left(\frac{a - np}{\sqrt{np(1-p)}}\right)$
- $P(Po(\lambda) \leq a) \approx P(N(\lambda, \lambda) \leq a + 0.5) = \Phi\left(\frac{a + \frac{1}{2} - \lambda}{\sqrt{\lambda}}\right)$

Esercizi esame:

$$P(X_1 + \cdots + X_n \leq b) \approx P(N(n\mu, n\sigma^2) \leq b), \qquad con\, n \gg 0$$
$$P\left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}} \leq a\right) \to \Phi\left(\frac{a - n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$$

5. Leggi congiunte di variabili aleatorie

Densità congiunta Discreta: $\boldsymbol{p_{X,Y}}: \mathbb{R}^2 \to [0,1], \quad (a,b) \mapsto \boldsymbol{P(X = a, Y = b)}$ (Intersezione di eventi)
Densità marginali Discrete: $\boldsymbol{p_X(a)} = \sum_{y\in\mathbb{R}} \boldsymbol{p_{X,Y}(a,y)} \quad , \boldsymbol{p_Y(b)} = \sum_{x\in\mathbb{R}} \boldsymbol{p_{X,Y}(x,b)}$

Densità congiunta Continua: $\boldsymbol{f_{X,Y}}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\geq 0}\ tc. \forall B \subseteq \mathbb{R}^2: P\big((X,Y) \in B\big) = \int_{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{f_{X,Y}(x,y)dxdy}$
Densità marginali Continue: $\boldsymbol{f_X(a)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f_{X,Y}(a,y)dy}, \quad \boldsymbol{f_Y(b)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f_{X,Y}(x,b)dx}$

$X\ e\ Y\ sono\ \boldsymbol{Indipendeti}\ sse$
- Se discrete: $\boldsymbol{p_{X,Y}(a,b)} = \boldsymbol{p_X(a)} \times \boldsymbol{p_Y(b)} \ \ \forall(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$
- Se continue: $\boldsymbol{f_{X,Y}(a,b)} = \boldsymbol{f_X(a)} \times \boldsymbol{f_Y(b)} \ \ \forall(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}) \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{2}}$

Se mi viene data una densità congiunta, posso ricavare le densità marginali, e quindi posso dire se le v.a. sono indipendenti.

Esercizi esame:

Determinare α: $1 = P(\Omega) = \int_{\mathbb{R}^2} \boldsymbol{f_{X,Y}(x,y)dxdy} = \int_{\dots}^{\cdots}\big(\int_{\dots}^{\cdots} \dots dy\big)dx = \cdots ricavo\ \alpha$

Calcola Distribuzione: $F_X(x) = P(X \leq r) = \int_{-\infty}^{r} \boldsymbol{f_X(x)dx}$

Densità marginali Continue: $\boldsymbol{f_X(a)} = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{f_{X,Y}(a,y)dy}$

$P(X \dots Y > \dots)$:
- Disegno sul piano dove la densità congiunta è diversa da 0
- Disegno la zona dei valori consentiti e integro su questa zona
- $\int_{\boldsymbol{D}} \boldsymbol{f(x,y)} = \int_{x_1}^{x_2} \left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)dy\right) dx$

Calcolo Distribuzione del minimo W:
- Disegno le rette s su X e Y (verticale e orizzontale)
- Le zone del minimo sono quelle in cui X o Y sono < s, tenendo conto anche del dominio, ovvero che non può essere <0
- $F_W(s) = P(W \leq s) = \int_{\dots}^{\cdots}\big(\int_{\dots}^{\cdots} \dots dy\big)dx$

Calcola valore atteso di X

$\int x^n = \frac{x^{n+1}}{n+1}$
$\int e^{-kx} = -\frac{1}{k}e^{-kx}$
$\int P(x)e^{-kx} = per\ parti\ g(x) = P(x), f'(x) = e^{-kx} = [f(x)g(x)]_a^b - \int f(x)g'(x)$

Esame

- Esercizio con Bayes. Tipo capitolo 3 del libro
- Congiunta: determina alpha, determina densità marginali, calcola P(X..|Y..)
- Binomiale-poisson: da approssimare con Normale
- Limite centrale